

# 核仪器原理作业

2026 春季学期

---

## 1. 第二周作业

### 1.1. 问答题

请描述说明  $\beta$  谱仪和  $\gamma$  谱仪存在哪些不同.

对象不同,  $\beta$  谱仪测量(正)电子的能量分布,  $\gamma$  谱仪测量光谱. 并且前者通过电离/激发进行测量, 后者通过光电效应, 康普顿散射, 电子对产生进行测量.

### 1.2. 平板电离室

1. 电子和正离子分别向阳极和阴极漂移, 两个板上感应电流的极性相反, 阳极流出电流, 阴极流入电流.
2. 电离出的电子和正离子对的数量为  $5 \cdot 10^4$  电荷量为  $8.01 \cdot 10^{-15} \text{ C}$ .
3. 考虑  $V_{\max} = Q/C = 0.8 \text{ mV}$

### 1.3. 平板电离室漂移时间

1. 电子的漂移时间为  $0.5 \mu\text{s}$ , 正离子为  $0.5 \text{ ms}$ .
2. 还是会产生电流, 因为电子漂移完后, 离子还在漂移, 产生离子尾巴.

## 2. 第三周作业

### 2.1. 信号变换

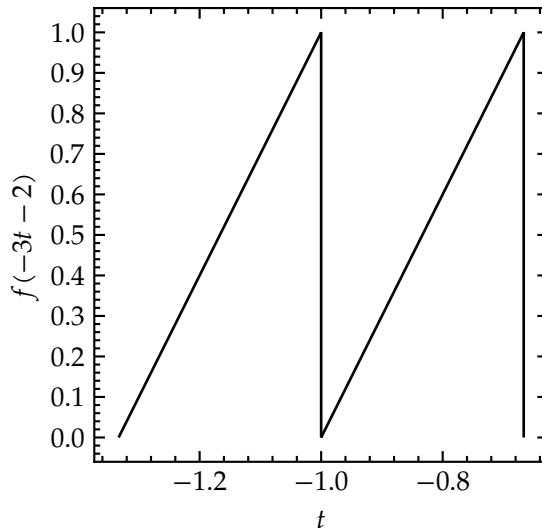
$e^{j10t}$  的周期为  $2\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ .

$(5 \sin(8t))^2 \propto \frac{1}{2} - \frac{\cos(16t)}{2}$ . 从而周期为  $\frac{\pi}{8}$ .

记  $r()$  为反褶,  $w(x)$  为向右移动  $x$ .  $h(\alpha)$  为伸缩  $\alpha$  倍, 有

$$f(-3t - 2) = h(3)r()w(2)f(t) \quad (1)$$

从而函数曲线为:



下列波形的函数式为:

$$f(t) = 1 - \left| \frac{t}{2} \right|, |t| < 2 \quad (2)$$

## 2.2. 信号与系统

$$1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) \delta(t) dt = f(-t_0) \quad (3)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} (\delta(t) - \delta(t - t_0)) dt = 1 - e^{-j\omega t_0} \quad (4)$$

3.  $r(t) = e(t)u(t)$  线性, 时变, 因果

4.  $r(t) = e(1 - t)$  线性, 时变, 非因果

5.  $r(t) = e(2t)$  线性, 时变, 非因果

6.  $r(t) = \int_{-\infty}^{5t} e(\tau) d\tau$  线性, 时变, 非因果

考虑第二个输入是第一个输入的导数:

$$r_2(t) = \frac{dr_1}{dt} = e^{-at} \delta(t) - ae^{-at} u(t) \quad (5)$$

## 2.3. 周期信号与傅里叶变换

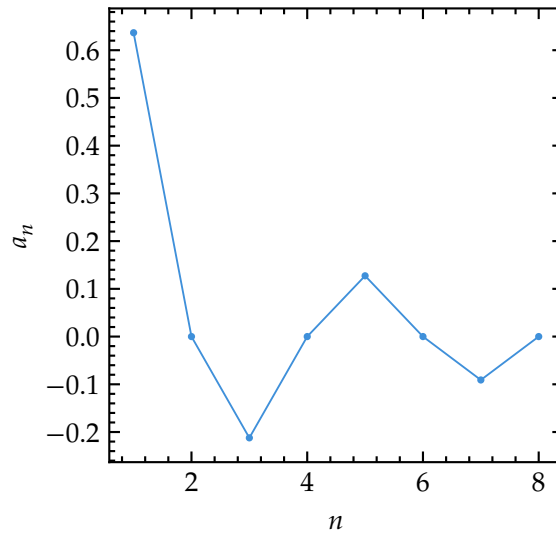
谱线间隔就是基频  $f = \frac{1}{T}$ , 间隔 1 MHz.

带宽在第一零点位置,  $f_B = \frac{1}{\tau}$ , 为 2 MHz.

因为是偶函数, 从而只有余弦项.  $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \cos(n\omega t) dt = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

从而基波与三次谐波的幅度比为

$$\frac{2}{\pi} / \left( \frac{2}{3\pi} \right) = 3 \quad (6)$$



### 3. 第五周作业

#### 3.1. 1

特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

解得  $\lambda_1 = -1 + j, \lambda_2 = -1 - j$ .

故零输入响应可写为  $r_{zi}(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)u(t)$

由初始条件  $r(0_+) = 1$  可得  $C_1 = 1$ .

再对上式求导:  $r'_{zi}(t) = e^{-t}((C_2 - C_1) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t)u(t)$

由  $r'(0_+) = 2$  得  $C_2 - C_1 = 2$

故  $C_2 = 3$ .

因此系统的零输入响应为  $r_{zi}(t) = e^{-t}(\cos t + 3 \sin t)u(t)$

#### 3.2. 2

在零初始条件下取拉氏变换, 有  $s^2R(s) + sR(s) + R(s) = sE(s) + E(s)$

故系统函数为  $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$

将分母配方:  $s^2 + s + 1 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

于是

$$H(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad (7)$$

所以冲激响应为

$$h(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t\right) u(t) \quad (8)$$

### 3.3. 3

题中系统满足  $\frac{dr}{dt} + 5r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)f(t - \tau) d\tau - e(t)$

其中  $f(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$

注意到  $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)f(t - \tau) d\tau = (e * f)(t)$

在零初始条件下取拉氏变换:  $sR(s) + 5R(s) = E(s)F(s) - E(s)$

而  $F(s) = \frac{1}{s+1} + 3$

故  $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{F(s)-1}{s+5}$

即

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + 2}{s + 5} = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 5)} \quad (9)$$

将其展开为部分分式:

$$\frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 5)} = \frac{1}{4(s + 1)} + \frac{7}{4(s + 5)} \quad (10)$$

因此单位冲激响应为  $h(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$

### 3.4. 4

#### 3.4.1. (a)

由图可知  $f_2(t) = \delta(t + 2) + \delta(t - 2)$

因此  $(f_1 * f_2)(t) = f_1(t + 2) + f_1(t - 2)$

原函数  $f_1(t)$  由两个单位三角波组成, 分别以  $t = -2$  和  $t = 2$  为中心. 所以卷积结果由 3 个三角波组成:

1. 在  $[-5, -3]$  上, 是一个峰值为 1 的三角波, 中心在  $t = -4$ .

2. 在  $[-1, 1]$  上, 是一个峰值为 2 的三角波, 中心在  $t = 0$ .

3. 在  $[3, 5]$  上, 是一个峰值为 1 的三角波, 中心在  $t = 4$ .

可写成

$$(f_1 * f_2)(t) = (1 - |t + 4|)(u(t + 5) - u(t + 3)) + 2(1 - |t|)(u(t + 1) - u(t - 1)) + (1 - |t - 4|)(u(t - 1) - u(t - 5))$$

### 3.4.2. (b)

由图可写  $f_1(t) = 2(u(t) - u(t - 1))$ ,  $f_2(t) = \sin t(u(t) - u(t - \pi))$ .

故

$$(f_1 * f_2)(t) = 2 \int_{\max(0, t-\pi)}^{\min(1, t)} \sin(t - \tau) d\tau \quad (12)$$

分段计算如下:

1. 当  $t < 0$  或  $t > \pi + 1$  时, 两函数无重叠,  $(f_1 * f_2)(t) = 0$

2. 当  $0 \leq t < 1$  时,

$$(f_1 * f_2)(t) = 2 \int_0^t \sin(t - \tau) d\tau = 2(1 - \cos t) \quad (13)$$

3. 当  $1 \leq t < \pi$  时,

$$(f_1 * f_2)(t) = 2 \int_0^1 \sin(t - \tau) d\tau = 2(\cos(t - 1) - \cos t) \quad (14)$$

4. 当  $\pi \leq t < \pi + 1$  时,

$$(f_1 * f_2)(t) = 2 \int_{t-\pi}^1 \sin(t - \tau) d\tau = 2(\cos(t - 1) + 1) \quad (15)$$

因此

$$(f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 2(1 - \cos t) & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ 2(\cos(t - 1) - \cos t) & \text{if } 1 \leq t < \pi \\ 2(\cos(t - 1) + 1) & \text{if } \pi \leq t < \pi + 1 \\ 0 & \text{if } t \geq \pi + 1 \end{cases} \quad (16)$$

### 3.5. 5

1.  $1 - e^{-at}$ ,

$$\mathcal{L}\{1 - e^{-at}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a} = \frac{a}{s(s + a)} \quad (17)$$

2.  $\sin t + 2 \cos t$ ,

$$\mathcal{L}\{\sin t + 2 \cos t\} = \frac{1}{s^2 + 1} + 2 \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{2s + 1}{s^2 + 1} \quad (18)$$

3.  $(1 + 2t)e^{-t}$ ,

$$\mathcal{L}\{(1 + 2t)e^{-t}\} = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{(s + 1)^2} = \frac{s + 3}{(s + 1)^2} \quad (19)$$

### 3.6. 6

1.  $\frac{1}{s(s^2 + 5)}$ ,

先做部分分式展开:

$$\frac{1}{s(s^2 + 5)} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 5} \right) \quad (20)$$

故其拉氏逆变换为

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 5)} \right\} = \frac{1}{5} (1 - \cos(\sqrt{5}t)) u(t) \quad (21)$$

2.  $3 \frac{s}{(s+4)(s+2)}$ ,

部分分式展开为

$$3 \frac{s}{(s + 4)(s + 2)} = \frac{6}{s + 4} - \frac{3}{s + 2} \quad (22)$$

故其拉氏逆变换为

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ 3 \frac{s}{(s + 4)(s + 2)} \right\} = (6e^{-4t} - 3e^{-2t}) u(t) \quad (23)$$

## 4. 第八次作业

### 4.1. 伽马能谱分析

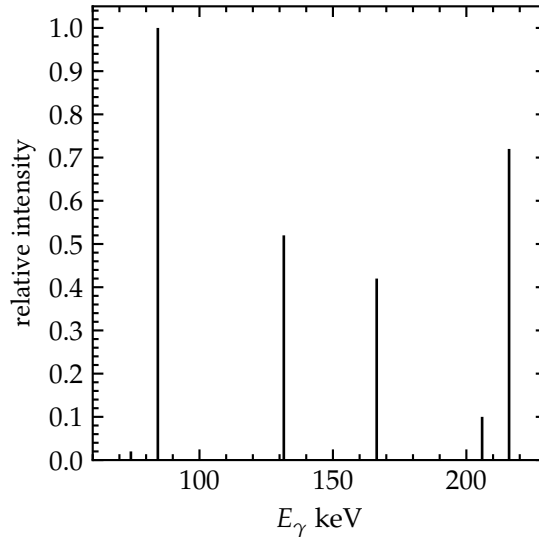
由题图可知,  $^{228}\text{Th}$  主要通过  $\alpha$  衰变布居  $^{224}\text{Ra}$  的 0, 84.43 keV, 215.99 keV, 250.78 keV, 290.32 keV 等能级. 低激发能级的退激  $\gamma$  射线主要由这些能级差决定:

1. 84.4 keV: 84.43  $\rightarrow$  0, 是最强的一条谱线;
2. 131.6 keV: 215.99  $\rightarrow$  84.43;
3. 166.4 keV: 250.78  $\rightarrow$  84.43;

4. 205.9 keV: 290.32 → 84.43;
5. 216.0 keV: 215.99 → 0;
6. 74.3 keV: 290.32 → 215.99, 这一支很弱.

因此可认为该核素的低能  $\gamma$  能谱由以上几条离散谱线组成. 其中 84.4 keV 为主峰, 216.0 keV 次之, 131.6 keV 与 166.4 keV 为中等强度, 205.9 keV 和 74.3 keV 较弱.

下面给出定性棒状谱, 仅表示相对强弱关系:



## 4.2. 平行板电离室阳极感应电流

取阳极感应电流流入前放大器为正. 由沉积能量与平均电离能可得产生的电子-离子对数

$$\begin{aligned}
 E_{\text{dep}} &= 1 \text{ MeV} \\
 w &= 25 \text{ eV} \\
 N &= \frac{1 \cdot 10^6}{25} = 4.0 \cdot 10^4
 \end{aligned} \tag{24}$$

对应总电荷量

$$Q_0 = Ne = 4.0 \cdot 10^4 \times 1.602 \cdot 10^{-19} \approx 6.41 \cdot 10^{-15} \text{ C} \tag{25}$$

平行板电离室中电场近似均匀, 故

$$\begin{aligned}
 V &= 1000 \text{ V} \\
 d &= 10 \text{ mm} = 0.01 \text{ m} \\
 E &= \frac{V}{d} = \frac{1000}{0.01} \approx 1.0 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}
 \end{aligned} \tag{26}$$

电子与正离子迁移率分别为  $\mu_e = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} = 0.2 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\mu_i = 2 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

所以漂移速度为  $v_e = \mu_e E \approx 2.0 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_i = \mu_i E \approx 20 \text{ m s}^{-1}$ .

对阳极而言, 权电场为  $E_w = \frac{1}{d} = 100 \text{ m}^{-1}$

根据 Shockley-Ramo 定律, 单种载流子对阳极的感应电流大小为  $i = qvE_w = \frac{qv}{d}$

电子与正离子贡献同号, 因而总感应电流为两者之和.

电子距阳极的距离为  $d - z_0 = 6 \text{ mm}$ , 正离子距阴极的距离为  $z_0 = 4 \text{ mm}$ , 故收集时间分别为

$$t_e = \frac{d - z_0}{v_e} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2.0 \cdot 10^4} \approx 3.0 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0.30 \mu\text{s} \quad t_i = \frac{z_0}{v_i} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{20} \approx 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 200 \mu\text{s}$$

电流大小分别为

$$i_e = \frac{Q_0 v_e}{d} \approx 1.28 \cdot 10^{-8} \text{ A} \quad i_i = \frac{Q_0 v_i}{d} \approx 1.28 \cdot 10^{-11} \text{ A} \quad (28)$$

因此阳极感应电流的时间波形为

$$i_{A(t)} = \begin{cases} i_e + i_i \approx 1.283 \cdot 10^{-8} \text{ A} & \text{if } 0 \leq t < 0.30 \mu\text{s} \\ i_i \approx 1.28 \cdot 10^{-11} \text{ A} & \text{if } 0.30 \mu\text{s} \leq t < 200 \mu\text{s} \\ 0 & \text{if } t \geq 200 \mu\text{s} \end{cases} \quad (29)$$

也就是说, 前面是一个约 12.8 nA 的快电子脉冲, 随后跟着一个约 12.8 pA 的长离子尾巴.

### 4.3. 栅极电离室阳极感应电流

理想栅极电离室中, 对阳极的权电势可取为

$$\varphi_w(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z \leq d_1 \\ \frac{z-d_1}{d-d_1} & \text{if } d_1 < z \leq d \end{cases} \quad (30)$$

因此权电场为

$$E_w(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq z \leq d_1 \\ \frac{1}{d-d_1} & \text{if } d_1 < z \leq d \end{cases} \quad (31)$$

题中  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 9 \text{ mm}$ ,  $d - d_1 = 1 \text{ mm}$ .

而实际漂移电场在两区都是

$$\frac{1000 - 900}{1 \text{ mm}} = \frac{900}{9 \text{ mm}} \approx 1.0 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1} \quad (32)$$

所以载流子漂移速度仍为  $v_e \approx 2.0 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_i \approx 20 \text{ m s}^{-1}$ .

#### 4.3.1. 电离发生在栅极下方

此时电离位置在栅极下方, 即  $z_0 < d_1$ . 在电子越过栅极之前, 阳极的权电场为零, 因而阳极上没有感应信号.

当  $z_0 = 4 \text{ mm}$  时, 电子从电离位置漂移到栅极  $z = 9 \text{ mm}$  所需时间为

$$t_1 = \frac{d_1 - z_0}{v_e} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2.0 \cdot 10^4} \approx 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0.25 \mu\text{s} \quad (33)$$

电子再从栅极漂移到阳极所需时间

$$t_2 = \frac{d - d_1}{v_e} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2.0 \cdot 10^4} \approx 5.0 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 0.05 \mu\text{s} \quad (34)$$

在阳极-栅极间隙内的感应电流大小为

$$i_A = \frac{Q_0 v_e}{d - d_1} = \frac{6.41 \cdot 10^{-15} \times 2.0 \cdot 10^4}{1.0 \cdot 10^{-3}} \approx 1.28 \cdot 10^{-7} \text{ A} \quad (35)$$

故阳极电流为

$$i_{A(t)} = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t < 0.25 \mu\text{s} \\ 1.28 \cdot 10^{-7} \text{ A} & \text{if } 0.25 \mu\text{s} \leq t < 0.30 \mu\text{s} \\ 0 & \text{if } t \geq 0.30 \mu\text{s} \end{cases} \quad (36)$$

即只有一个宽度约 50 ns, 高度约 128 nA 的快脉冲, 基本没有离子尾巴.

#### 4.3.2. 电离发生在栅极与阳极之间

当  $z_0 = 9.5 \text{ mm}$  时, 电离位置位于栅极与阳极之间, 因此电子和正离子一产生就都在权电场区域内.

电子到达阳极的时间为

$$t_e = \frac{d - z_0}{v_e} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{2.0 \cdot 10^4} \approx 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 25 \text{ ns} \quad (37)$$

正离子到达栅极的时间为

$$t_i = \frac{z_0 - d_1}{v_i} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{20} \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 25 \mu\text{s} \quad (38)$$

所以  $i_e = \frac{Q_0 v_e}{d-d_1} \approx 1.28 \cdot 10^{-7} \text{ A}$ ,  $i_i = \frac{Q_0 v_i}{d-d_1} \approx 1.28 \cdot 10^{-10} \text{ A}$ .

阳极电流波形为

$$i_{A(t)} = \begin{cases} i_e + i_i \approx 1.283 \cdot 10^{-7} \text{ A} & \text{if } 0 \leq t < 25 \text{ ns} \\ i_i \approx 1.28 \cdot 10^{-10} \text{ A} & \text{if } 25 \text{ ns} \leq t < 25 \mu\text{s} \\ 0 & \text{if } t \geq 25 \mu\text{s} \end{cases} \quad (39)$$

因此, 当电离发生在栅极上方时, 阳极仍会看到一个较弱但可见的离子尾巴.

#### 4.4. 硅探测器耗尽与电场

这是一个一侧突变结近似下的  $p^+n^-$  探测器. 取  $n$  区厚度  $d = 0.3 \text{ mm} = 3.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $N_D = 1 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} = 1 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ .

$$\epsilon_{\text{Si}} = 11.7\epsilon_0 \approx 1.04 \cdot 10^{-10} \text{ F m}^{-1} \quad (40)$$

##### 4.4.1. 全耗尽电压

忽略内建电势相对于几十伏量级的影响, 全耗尽电压为  $V_{\text{fd}} = \frac{qN_D d^2}{2\epsilon_{\text{Si}}}$

代入得

$$V_{\text{fd}} = \frac{(1.602 \cdot 10^{-19})(1 \cdot 10^{18})(3.0 \cdot 10^{-4})^2}{2 \times 1.04 \cdot 10^{-10}} \approx 69.6 \text{ V} \quad (41)$$

所以全耗尽电压约为  $V_{\text{fd}} \approx 70 \text{ V}$

##### 4.4.2. 反向偏压 200 V 时的电场分布

由于  $200 \text{ V} > V_{\text{fd}}$ , 探测器已完全耗尽, 并处于过耗尽状态. 若以左侧背电极为  $x = 0$ , 右侧  $p^+$  阳极为  $x = d$ , 则电场强度大小满足  $\frac{d|E|}{dx} = \frac{qN_D}{\epsilon_{\text{Si}}}$

并且  $\int_0^d |E(x)| dx = V_R$

故有

$$|E(x)| = \frac{V_R - V_{\text{fd}}}{d} + \frac{qN_D x}{\epsilon_{\text{Si}}} \quad (42)$$

其中  $V_R = 200 \text{ V}$ , 所以

$$\begin{aligned} E_0 &\approx 4.35 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1} \\ S &\approx 1.55 \cdot 10^9 \text{ V m}^{-2} \\ |E(x)| &\approx E_0 + Sx \end{aligned} \quad (43)$$

这里  $x$  用  $\text{m}$  为单位,  $|E|$  用  $\text{V m}^{-1}$  为单位.

因此  $|E(0)| \approx 4.35 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}$ ,  $|E(d)| \approx 8.99 \cdot 10^5 \text{ V m}^{-1}$ .

故电场强度在背电极处最小, 向  $p^+$  阳极线性增大, 形状是一个带底座的三角形.

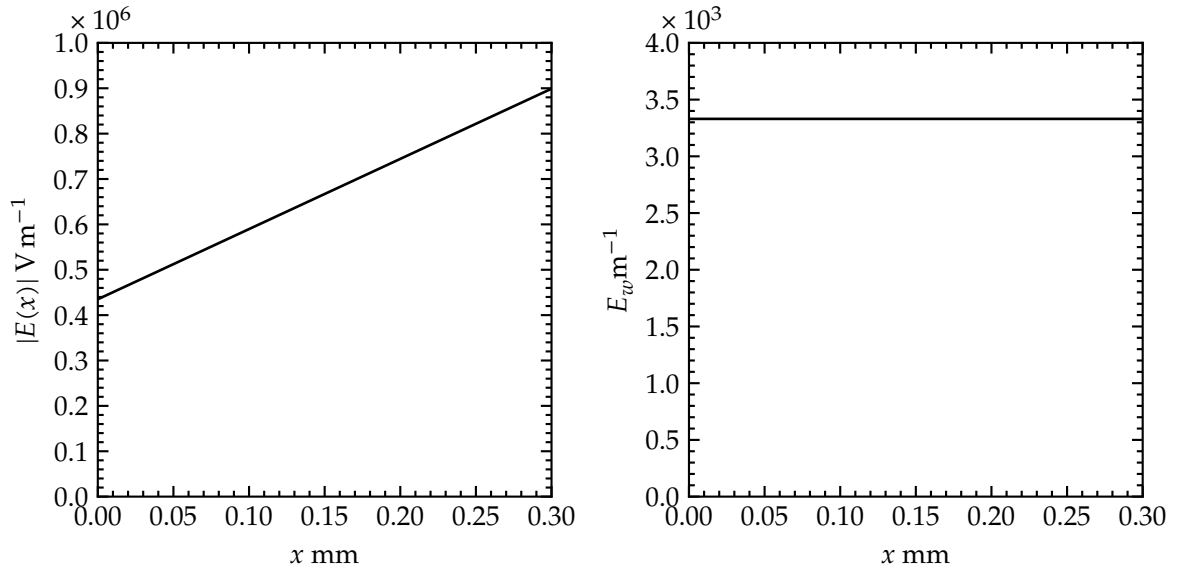
#### 4.4.3. 阳极的权电场分布

平板型探测器中, 阳极权电势满足  $\varphi_w(x) = \frac{x}{d}$

因此阳极权电场为常数

$$E_w = \frac{d\varphi_w}{dx} = \frac{1}{d} = \frac{1}{3.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}} \approx 3.33 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \quad (44)$$

也就是说, 阳极的权电场在整个厚度内都是均匀不变的.



#### 4.5. 载流子俘获时的输出电荷

设产生了  $n$  对电子-空穴对. 图中载流子产生位置距离阳极为  $\frac{D}{4}$ , 因此若从左侧背电极起算, 产生位置为  $x_0 = \frac{3D}{4}$

对右侧阳极而言, 权电势为  $\varphi_w(x) = \frac{x}{D}$

所以初始权电势  $\varphi_w(x_0) = \frac{3}{4}$

根据 Shockley-Ramo 定理, 单个载流子在阳极上感应出的电荷量大小为  $\Delta Q = |q| \left| \varphi_w(x_f) - \varphi_w(x_i) \right|$

##### 4.5.1. 电子和空穴全部被收集

电子漂移到阳极, 因而单个电子贡献  $\Delta Q_e = e \left( 1 - \left( \frac{3}{4} \right) \right) = \frac{e}{4}$

空穴漂移到背电极, 单个空穴贡献  $\Delta Q_h = e \left( \left( \frac{3}{4} \right) - 0 \right) = \frac{3e}{4}$

故总输出电荷量为  $\Delta Q = n(\Delta Q_e + \Delta Q_h) = ne$

#### 4.5.2. 电子全部被收集, 空穴仅有 50% 被收集

电子仍全部贡献  $\frac{ne}{4}$

只有一半空穴到达背电极, 另一半产生后立刻被俘获, 近似不产生漂移感应电荷. 因此空穴贡献为  $0.5 \times \left(\frac{3ne}{4}\right) = \frac{3ne}{8}$

$$\text{故 } \Delta Q = \frac{ne}{4} + \frac{3ne}{8} = \frac{5ne}{8}$$

#### 4.5.3. 电子全部被收集, 空穴仅有 10% 被收集

同理可得

$$\Delta Q = \frac{ne}{4} + 0.1 \times \left(\frac{3ne}{4}\right) = \left(\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{40}\right)\right)ne = \frac{13ne}{40} \quad (45)$$

所以三种情况下阳极输出电荷量分别为  $\Delta Q = ne, \frac{5ne}{8}, \frac{13ne}{40}$ .

对应前置放大器输出电压幅度为  $\Delta V = \frac{\Delta Q}{C}$

因此空穴俘获越严重, 脉冲幅度越小.

## 5. 第九次作业

### 5.1. 1

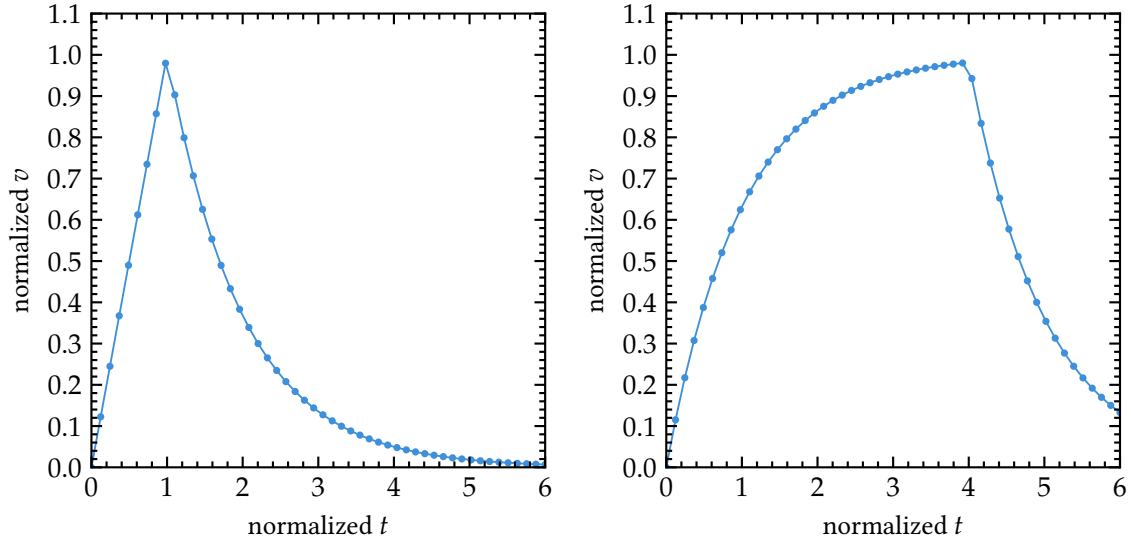
设输入矩形电流脉冲为  $i_{s(t)} = I_0(u(t) - u(t - t_w))$

并联 RC 电路满足  $C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i_{s(t)}$

因此在脉冲作用期间  $0 < t < t_w, v(t) = I_0R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

在脉冲结束后  $t > t_w, v(t) = I_0R\left(1 - e^{-\frac{t_w}{RC}}\right)e^{-\frac{t-t_w}{RC}}$

1. 当  $t_w$  远小于  $RC$  时, 指数项可展开为  $e^{-\frac{t}{RC}} \approx 1 - \frac{t}{RC}$ , 因而在  $0 < t < t_w$  时  $v(t) \approx \left(\frac{I_0}{C}\right)t$ , 即输出近似线性上升到  $v_{\max} \approx I_0\frac{t_w}{C} = \frac{Q}{C}$  随后按时间常数  $RC$  指数衰减. 这时波形近似为窄三角脉冲.
2. 当  $t_w$  远大于  $RC$  时, 输出先在约几个  $RC$  内快速上升并趋近于稳态值  $v \approx I_0R$  在脉冲持续的大部分时间里近似保持平台. 脉冲结束后再以时间常数  $RC$  指数下降. 这时波形近似为圆角矩形脉冲.



### 5.2. 2

由外特性曲线可直接读出 3 个区间的电压增益, 即各段斜率  $K = \frac{dv_o}{dv_i}$

在  $(-b, -a)$  区间,  $K_1 = \frac{A-B}{b-a} = \left(\frac{1.0-1.4}{3-1}\right) \text{ V mV}^{-1} = -200$

在  $(-a, a)$  区间,  $K_2 = \frac{-A-A}{a-(-a)} = \left(\frac{-1.0-1.0}{2}\right) \text{ V mV}^{-1} = -1000$

在  $(a, b)$  区间,  $K_3 = \frac{-B-(-A)}{b-a} = \left(\frac{-1.4+1.0}{2}\right) \text{ V mV}^{-1} = -200$

反馈电容在输入端的密勒等效值为  $C_M = C_f(1 - K)$

于是  $C_{M1} = C_{M3} = 1 \times (1 - (-200)) = 201 \text{ pF}$ ,  $C_{M2} = 1 \times (1 - (-1000)) = 1001 \text{ pF}$ .

若把输入端本身电容  $C_i = 10 \text{ pF}$  也计入, 则 3 个区间的总等效输入电容分别为

$$\begin{aligned} C_{in,1} &= C_{in,3} = 211 \text{ pF} \\ C_{in,2} &= 1011 \text{ pF} \end{aligned} \tag{46}$$

当  $v_i$  初始为 0 且输入电流  $i_s$  由小变大时, 由于电流源方向向下, 输入节点电压  $v_i$  逐渐变负, 工作点沿外特性曲线从原点向左移动:

1. 起初处于  $(-a, a)$  区间, 增益最大, 因而  $v_o$  近似按高斜率快速上升.
2. 当  $v_i < -a$  后进入  $(-b, -a)$  区间, 斜率减小为  $-200$ ,  $v_o$  继续上升但速度明显变慢.
3. 当  $v_i < -b$  后输出进入正饱和,  $v_o \approx B = 1.4 \text{ V}$ , 再增大  $i_s$  也几乎不再上升.

也就是说, 输出电压随输入电流增大经历“快增益区 -> 慢增益区 -> 饱和区”的变化.

### 5.3. 3

图中反馈网络为  $R_2 = 1000$ ,  $C_2 = 1 \text{ pF}$ ,  $A = 1 \cdot 10^4$ .

输入端还并联有  $R_1 = 100$ ,  $C_1 = 2000 \text{ pF}$ .

由于  $v_o = -Av_i$

反馈电阻和反馈电容在输入端的等效值分别为  $R_{f,eq} = \frac{R_2}{1+A}$ ,  $C_{f,eq} = (1+A)C_2$ .

故整个放大器的等效输入阻抗  $Z_i = R_i \parallel \left(\frac{1}{sC_i}\right)$

其中  $R_i = R_1 \parallel R_{f,eq}$ ,  $C_i = C_1 + C_{f,eq}$ .

代入数值得  $R_{f,eq} = \left(\frac{1000}{10001}\right) \approx 0.100$

$$R_i = 100 \parallel 0.100 \approx 9.99 \cdot 10^4 \Omega \quad C_i = 2000 \text{ pF} + 10001 \times 1 \text{ pF} = 12001 \text{ pF} \approx 12.0 \text{ nF} \quad (47)$$

所以等效输入阻抗可写为  $Z_i \approx 99.9 \parallel 12.0 \text{ nF}$

## 5.4. 4

### 5.4.1. (1)

左图为反相放大器, 有  $v_o = A(0 - v_-) = -Av_-$

在反相输入节点列 KCL:  $\frac{v_i - v_-}{R_2} + \frac{v_o - v_-}{R_1} = 0$

代入  $v_- = -\frac{v_o}{A}$  后得闭环增益  $\frac{v_o}{v_i} = -A \frac{R_1}{R_1 + (A+1)R_2}$

代入  $R_1 = 100, R_2 = 1, A = 1000$ ,  $\frac{v_o}{v_i} = -1000 \times \frac{100}{100+1001} \approx -90.83$

### 5.4.2. (2)

右图为同相放大器. 反馈系数  $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{100}$

且  $v_o = A(v_i - \beta v_o)$

所以闭环增益  $\frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + A\beta}$

代入  $A = 1000, \beta = 0.01$ ,  $\frac{v_o}{v_i} = \frac{1000}{1+10} \approx 90.91$

故两种电路在有限开环增益下的闭环放大倍数分别为  $K_1 \approx -90.83, K_2 \approx 90.91$ .

## 5.5. 5

设反相输入节点电压为  $v_i$ , 输出电压为  $v_o$ . 左侧运放输出为  $-Av_i$ , 中间 RC 网络满足

$$\frac{-Av_i - v_o}{R} = C \frac{dv_o}{dt} + C_f \frac{dv_o - v_i}{dt} \quad (48)$$

输入端列 KCL:  $i(t) = C_i \frac{dv_i}{dt} + C_f \frac{dv_i - v_o}{dt}$

在拉氏域令  $i(t) = Q\delta(t)$ , 即  $I(s) = Q$ , 可解得  $V_{o(s)} = -Q \frac{A - RC_f s}{s(C_T + Ks)}$

其中记  $C_T = C_i + (1+A)C_f$ ,  $K = R(C_i C + C_i C_f + C C_f)$ .

将其写成部分分式可得

$$V_{o(s)} = -Q \left( \frac{A}{C_T s} - \frac{RC_f + A \frac{K}{C_T}}{K \left( s + \frac{C_T}{K} \right)} \right) \quad (49)$$

因此时域表达式为

$$v_{o(t)} = -Q \left( \frac{A}{C_T} - \left( R \frac{C_f}{K} + \frac{A}{C_T} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad (50)$$

其中  $\tau = \frac{K}{C_T}$

若满足  $(1 + A)C_f$  远大于  $C_i$ ,

则

$$\begin{aligned} C_T &\approx (1 + A)C_f \\ \tau &\approx R \frac{C}{1 + A} \end{aligned} \quad (51)$$

而稳态幅度  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{o(t)} \approx -A \frac{Q}{(1 + A)C_f} \approx -\frac{Q}{C_f}$

故可写成近似形式

$$\begin{aligned} v_{o(t)} &\approx -\frac{Q}{C_f} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \\ \tau &\approx R \frac{C}{1 + A} \end{aligned} \quad (52)$$

波形上表现为: 输出从接近 0 开始快速上升, 经过约几个  $\tau$  后稳定到  $-\frac{Q}{C_f}$ .

若在  $C_f$  两端并联  $R_f$ , 且  $R_f C_f$  远大于  $RC$ ,

则快上升过程基本不变, 但反馈电容上的电荷会通过  $R_f$  缓慢泄放, 输出不再长期保持平台, 而是在到达峰值后按较长时间常数  $\tau_f \approx R_f C_f$  缓慢回到基线. 因此波形由“快上升 + 平顶”变为“快上升 + 慢恢复”的典型电荷灵敏前放脉冲.

## 5.6.6

电荷灵敏前放的闭环上限频率近似为  $f_H \approx \frac{GBW}{1 + \frac{C_i}{C_f}}$

于是上升时间  $t_r \approx \frac{0.35}{f_H} = 0.35 \frac{1 + \frac{C_i}{C_f}}{GBW}$

逐项代入:

1. (1)

$$t_r = 0.35 \times \frac{1 + \frac{10}{1}}{1 \cdot 10^9} \approx 3.85 \text{ ns} \quad (53)$$

2. (2)

$$t_r = 0.35 \times \frac{1 + \frac{10}{2}}{1 \cdot 10^9} \approx 2.10 \text{ ns} \quad (54)$$

3. (3)

$$t_r = 0.35 \times \frac{1 + \frac{10}{1}}{2 \cdot 10^9} \approx 1.93 \text{ ns} \quad (55)$$

4. (4)

$$t_r = 0.35 \times \frac{1 + \frac{10}{2}}{0.5 \cdot 10^9} \approx 4.20 \text{ ns} \quad (56)$$

## 5.7. 7

记输入节点为  $v_i$ , 输出节点为  $v_o$ . 跨导放大器满足  $i_o = G(v_+ - v_-) = -Gv_i$

其中  $G = 10 \text{ mA V}^{-1} = 0.01 \text{ S}$

图中参数为

$$\begin{aligned} C_i &= 100 \text{ pF} \\ C_f &= 1 \text{ pF} \\ C &= 10 \text{ pF} \\ R &= 500 \end{aligned} \quad (57)$$

输入端与输出端列方程可得该系统的主时间常数近似为  $\tau \approx \frac{C_i C + C_i C_f + C C_f}{C_f G + \frac{C_i + C_f}{R}}$

代入数值:

$$C_i C + C_i C_f + C C_f = (100 \times 10 + 100 \times 1 + 10 \times 1) \text{ pF}^2 = 1110 \text{ pF}^2 \quad (58)$$

$$C_f G = 1 \cdot 10^{-12} \text{ F} \times 0.01 \text{ S} = 1.0 \cdot 10^{-14} \text{ F S}^{-1}$$

$$\frac{C_i + C_f}{R} = \frac{101 \cdot 10^{-12} \text{ F}}{500 \cdot 10^3 \Omega} \approx 2.02 \cdot 10^{-16} \text{ F S}^{-1} \quad (59)$$

由于  $C_f G$  远大于  $\frac{C_i + C_f}{R}$ ,

故

$$\tau \approx \frac{1110 \cdot 10^{-24} \text{ F}^2}{1.02 \cdot 10^{-14} \text{ F s}^{-1}} \approx 1.09 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 109 \text{ ns} \quad (60)$$

于是输出电压的上升时间估算为  $t_r \approx 2.2\tau \approx 2.4 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 240 \text{ ns}$

因此该跨导前放的输出上升时间约为  $t_r \approx 0.24 \mu\text{s}$